ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES

4.1 Calcule los puntos críticos de los siguientes sistemas lineales homogéneos:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x' = y \\ y' = 2y \end{cases}$$

4.2 Dibuje el diagrama de fases de los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = x \\ y' = -x + 2y \end{cases} \qquad \text{(e)} \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad \text{(f)} \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -y \end{cases}$$

4.3 Para los siguientes problemas con condiciones iniciales, halle la expresión de la órbita (trayectoria), y precise su estabilidad:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x \\ x(0) = 1, y(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = x + 5y \\ x(0) = 2, y(0) = -1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -x + y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

4.4 Clasifique el punto crítico $(0, 0)$ y halle las trayectorias de los siguientes sistemas:

$$\text{(a) } X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t) \quad \text{(b) } X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X(t) \quad \text{(c) } X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} X(t)$$

4.5 Clasifique el punto crítico $(0, 0)$ en los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\text{(a)} \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = cx(t) - y(t) \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = x(t) + ay(t) \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

4.6 Determine el valor del parámetro real a de modo que $(0, 0)$ sea un punto centro estable del sistema $\begin{cases} x' = -ax + y \\ y' = -x + ay \end{cases}$

4.7 Determine el valor del parámetro real a de modo que $(0, 0)$ sea un foco espiral estable del sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + ay \end{cases}$

4.8 Pruebe que para los valores del parámetro real a con $a \neq -1$, el $(0, 0)$ es un punto inestable del sistema $\begin{cases} x' = ax + y \\ y' = -x + y \end{cases}$
¿Para qué valor de a el $(0, 0)$ es un punto de silla inestable? ¿Cuándo $(0, 0)$ es un foco espiral inestable?

4.9 Sea $y = y(t)$. Estudie la estabilidad de las soluciones de las siguientes ecuaciones lineales transformándolas en un sistema bidimensional:

$$\text{(a) } y'' + y = 0 \quad \text{(b) } y'' - y' - 6y = 0 \quad \text{(c) } y'' + 2ay' + y = 0, \ \text{ según los valores de } a \geq 0$$